混水平的均匀设计的构造

覃红　　熊明

（华中师范大学统计系　武汉）

摘要：我们用离散偏差来度量部分因子设计的均匀性，本文的目的在于寻找一些构造均匀设计的方法，这些方法比文献中已有的方法更简单且成本更低。我们得到了离散偏差的一个下界，一个 U－型设计的离散偏差值达到下这个下界，那么该设计是一个均匀设计。我们建立了均匀设计与组合设计理论中均匀可分解设计之间的联系。通过均匀可分解设计，提出了一些新的构造均匀设计的方法。同时也给出了许多均匀设计存在的无穷类。

关键词：离散偏差　　均匀设计　　成对平衡设计　　均匀可分解设计

1. 引言

均匀设计是要求试验点均匀分布在试验区域的设计。在近十年里，均匀设计的构造引起了人们极大的兴趣。而均匀性度量标准在均匀设计的构造中起着相当重要的作用，伪蒙特卡洛方法中的各种偏差已经作为了均匀性的度量。Fang and Wang (1994) 以及 Fang (2000) 给出了这些度量的综合性评述。均匀设计就是那些具有最小偏差的设计。在低偏差下，即使试验点的数目和维数是适当的小，去寻找一个试验点均匀分布在试验区域的集合也是一个 NP 问题。为了减少计算机搜索的成本，所有存在的均匀设计都是在 U－型设计的基础上构造的，即每个因子水平是相等的情形 (Fang et al.,2000)。Fang and Wang (1994) 考虑了 U－型设计的一个子集，即好格子点集，他们用星偏差，即拟合最优检验中的 Kolmogorov-Smirnov 统计量，作为均匀性的度量。一般来说，计算一个 U－型设计的星偏差也是一个 NP 问题。Fang , Ma and Winker (2002) 讨论了怎样利用中心 L_2－偏差去寻找均匀设计。算法在这一方法中起到相当重要的作用。当试验次数或因子数太大时要找到一个所有候选 U－型设计是不可能的，因为这些设计太多或太大了。U－型设计的复杂性是在低偏差下构造均匀设计的主要困难。这就需要新的均匀性度量标准使得我们不用在全部候选表中寻找均匀设计。

最近，Hickernell and Liu (2002) 提出了一个所谓的离散偏差，用它作为均匀性的度量可以大大降低了计算量。有关离散偏差的统计合理性有许多文章讨论。Hickernell and Liu (2002)指出离散偏差下的均匀设计能限制混杂。Liu and Hickernell (2002) 利用离散偏差来评估超饱和试验设计，并指出对于 2 水平的超饱和试验设计，离散偏差与 $E(S^2)$ 标准是一样的。Liu (2002) 利用离散偏差来评估等水平的部分因子设计，发现正交性与均匀性之间有很好的联系。Qin and Fang (2003) 给出了以离散偏差为度量的均匀性、广义最小混杂、最小矩混杂、以及

以中心 L_2 －偏差、可卷型 L_2 －偏差为度量的均匀性之间的关系，这些联系为利用离散偏差作为因子设计均匀性度量标准提供了理论上的合理性。Fang , Ge and Liu (2002) 用离散偏差作为等水平超饱和设计均匀性的度量，并且在可分解的平衡不完全区组设计的基础上提出了一个均匀超饱和设计的构造方法。在离散偏差下，系统而有效的构造混水平均匀设计的方法在文献中不太能找到。本文中我们将给出一些有效的方法。

令 $U(n;q_1,\cdots,q_m)$ 代表一个 n 次试验，m 个因子的 U－型设计，相应有一个 $n\times m$ 矩阵使得其第 j 列的元素从 q_j 个元素的集合 $\{1,\cdots,q_j\}$ 中取值，通常它们是相等的。所有这样的设计构成的集合用 $\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$ 来表示。对于一个给定的设计 $X=(x_{ij})\in\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$，让 ψ_{kl} 表示 X 中第 k 行与第 j 行相同元素的数目，也就是 $\psi_{kl}=\sum_{j=1}^m 1_{\{x_{kj}=x_{lj}\}}$。显然 $\psi_{kk}=m$。值得注意的是，在编码理论中，$m-\psi_{kl}$ 就是 X 中第 k 行与第 j 行的 Hamming 距离。定义 $\psi=(\sum_{i=1}^m n/q_i)\big/(n-1)$，$\gamma=[\psi]$，$d_\gamma=(n-1)(\gamma+1-\psi)$，和 $d_{\gamma+1}=(n-1)(\psi-\gamma)$，这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分。于是我们得到 X 的离散偏差值 $D(x;a,b)$ 有如下的下界：

定理 1 对任意设计矩阵 $X\in\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$，有

$$D^2(X;a,b)=-\prod_{j=1}^m\left[\frac{a+(q_j-1)b}{q_j}\right]+\frac{a^m}{n}+\frac{2b^m}{n^2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=k+1}^n\left(\frac{a}{b}\right)^{\psi_{kl}} \quad (1)$$

$$\geq-\prod_{j=1}^m\left[\frac{a+(q_j-1)b}{q_j}\right]+\frac{a^m}{n}+\frac{(n-1)[b(\gamma+1-\psi)+a(\psi-\gamma)]b^m}{nb}\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma} \quad (2)$$

达到(2)式右边的下界的充要条件是对 X 中的每个实验点 x_k，在 $\psi_{kl}(k\neq l)$ 的 $n-1$ 个值中，有 d_γ 取值 γ，有 $d_{\gamma+1}$ 取值 $\gamma+1$。

很明显，$\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$ 中的一个设计的离散偏差值的平方如果达到(2)式右边的下界，则这个设计是均匀设计，记为 $U_n(q_1,\cdots,q_m)$。

本文我们主要讨论当对所有$1 \le l \ne k \le n$，$\psi_{kl} = \psi$，即ψ是一个整数，$\gamma = \psi$，$d_\gamma = n-1$时，均匀设计$U_n(q_1,\cdots,q_m)$的构造。我们的目的是提出一些更简单易行的新方法来构造这些均匀设计。我们将建立起$\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$的一个子集中的设计与均匀可分解设计之间的联系，后者是组合设计理论中一个重要的研究问题。根据这种联系我们得到了一些均匀设计的构造方法。这篇文章主要的创新点在于研究试验点之间的关系而不是研究因子之间的关系。

2. 设计的构造

定理 1 中的下界是非常有用的。它告诉我们，一个 U－型设计的离散偏差值如果达到(2)式右边的下界，则此设计的任意不同两行的水平组合在某种意义上达到了一种平衡，而且如果从区组的角度来看设计的行，这样 U－型设计的每一对行同时出现在相同数目的区组中，这说明在这些行之间也存在着某种平衡。这就表明在均匀设计与区组设计之间存在着一些联系。

区组设计是试验设计中很重要的一类，也是组合设计中的重要的研究问题。区组设计最初的思想来源于农业和生物试验，但如今这种思想已广泛的被应用于科学和工程的许多领域。本文中我们将利用区组设计来构造均匀设计。现在我们将介绍一种叫做均匀可分解设计(Uniformly Resolvable Design) 的组合设计。

首先介绍均匀可分解设计的一个子类，即可分解的平衡不完全区组设计。令ν表示 n 个处理的集合，β表示ν中 b 个子集（叫做区组）的一个集合使得每个区组的大小为 k。一个平衡不完全区组设计(Balanced Incomplete Block Dsign)，记作$BIBD(n,b,m,k,\lambda)$是一对(ν,β)使得每个处理恰好出现在 m 个区组中，且每对不同的处理恰好出现在λ个区组中。易看出，这五个参数(n,b,m,k,λ)满足下列两个等式：

$$nm = bk \quad 和 \quad \lambda(n-1) = m(k-1)$$

因此，我们可以把$BIBD(n,b,m,k,\lambda)$写作$BIBD(n,k,\lambda)$。

一个区组设计被称为可分解的(Resolvable)，如果区组可划分为由划分所有处理的区组的集合组成的平行类。如果平行类中每个区组的大小相同，则称这个平行类是均匀的。一个可分解的$BIBD(n,k,\lambda)$记作$RBIBD(n,k,\lambda)$。例 3 中给出了一个$RBIBD(n,k,\lambda)$的例子。

注意到在 $BIBD$ 中所有区组的大小相同。而在组合设计理论中通常讨论的平衡设计并不是所有区组的大小相同。这种设计在文献中称作成对平衡设计(Pairwise Balanced Design)。令 K 表示包含区组大小不同的值的一个子集，R 是一个多元集，且$|R|=|K|$（$|K|$表示集合 K 的基），且对每个$k \in K$，相应的有一个正数$r_k \in R$使得恰有r_k个大小为 k 的区组的平行类。一个成对平衡设计，记为$PBD(n,K,\lambda)$，是一对(v,β)具有下列性质：如果$B \in \beta$，则$|B| \in K$，且v中每对不同的处理恰出现在β中λ个区组中。很明显，当$|K|=1$时，这个概念就简化为一个 $BIBD$。一个均匀可分解设计，记为$URD(n,K,\lambda,R)$，是一个可分解的$PBD(n,K,\lambda)$使得所有的平行类是均匀的。对一个URD，如果$K=\{k_1,\cdots,k_l\}$，$R=\{r_1,\cdots,r_l\}$，很明显有

$$\lambda(n-1)=\sum_{i=1}^{l} r_i(k_i-1)。 \tag{3}$$

对区组设计的详细介绍可参阅 Calinski and Kageyama (2000) and Beth et al. (1999)。

下面给出一个$URD(n,k,\lambda,R)$的例子。

例 1 $URD(6,\{3,2\},1,\{1,3\})$。这时 n=6，$v=\{1,2,3,4,5,6\}$。6 个处理安排到 b=11 个区组中，区组大小为$k_j \in K=\{3,2\}$，使得每个处理恰出现在四个平行类中，这四个平行类用P_1，P_2，P_3，P_4表示如下（在每个平行类中，一个$\{\cdots\}$表示一个区组）。

$$P_1=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}；$$

$$P_2=\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}；$$

$$P_3=\{\{3,5\},\{1,6\},\{2,4\}\}；$$

$$P_4=\{\{2,6\},\{3,4\},\{1,6\}\}。$$

可以看到每个处理恰出现在 $\lambda=1$ 个区组中，因此这个设计是 $URD(6,\{3,2\},1,\{1,3\})$。

下面我们来建立均匀设计与均匀可分解设计之间的关系。为说明这个，假设存在一个 $URD(n,K,\lambda,R)$。为了符号的方便，令 $v=\{1,2,\cdots,n\}$，$K=\{n/q_1,\cdots,n/q_m\}$，$\beta=\bigcup_{j=1}^{m}P_j$，这里每个 P_j 表示一个含 q_j 个区组的平行类。于是一个 U－型设计 $X\in\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$ 可以由一个 $URD(n,K,\lambda,R)$ 通过以下步骤而得到。

第一步　对每个平行类 $P_j\,(j=1,\cdots,m)$ 中 q_j 个区组按 $1,2,\cdots,q_j$ 编号；

第二步　对每个 P_j 构造一个如下 q_j－水平的列向量 $x^j=(x_{ij})$：

如果处理 i 包含在 B 中 P_j 的第 u 个区组中，则令 $x_{ij}=u$。

第三步　合并这 m 个由 B 中 P_j 构造出的列向量，从而形成一个 U－型设计 $X\in\mu(n;q_1,\cdots,q_m)$。

值得注意的是得到的这个设计 X 是一个均匀设计。事实上，不难看出 X 的任意两不同行一致的数目是一个常数 λ。由(3)，$\lambda=\left(\sum_{j=1}^{m}n/q_j-m\right)/(n-1)$。依据定理 1，X 是一个均匀设计。

为说明上述步骤，下面给一个例子说明怎样用 URD 来构造均匀设计。

例 2　用例 1 中的 $URD(6,\{3,2\},1,\{1,3\})$ 来构造 $U_6(2^1 3^3)$。$U_6(2^1 3^3)$ 的四列由 $URD(6,\{3,2\},1,\{1,3\})$ 的四个平行类构造如下：在 P_1 中有两个区组 $\{1,2,3\}$ 和 $\{4,5,6\}$。我们把“1”放在 X 中第 1 列的 1，2，3 行，把“2”放在 X 中第 1 列的 4，5，6 行，于是得到 X 中一个 2-水平的列向量。同样的，由 P_2 把“1”放在 X 中第 2 列的 1，4 行，“2”和“3”分别放在 X 中第 2 列的 2，5 行和 3，6 行，于是得到 X 中一个 3-水平的列向量。通过这种方法，四列由四个平行类构造而成，从而构成一个如下 U－型设计 $X\in\mu(6;2^1,3^3)$：

$$X=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&1\\1&3&1&2\\2&1&3&2\\2&2&1&3\\2&3&2&1\end{pmatrix}$$

很容易验证 X 是$U_6(2^1 3^3)$。

相反的，我们也可以通过一个均匀设计构造一个URD。假设 X 是一个均匀设计$U_n(q_1,\cdots,q_m)$，其离散偏差的平方达到(2)式右边的下界。对 X 中的第 j 列x^j，我们可以构造q_j个大小为n/q_j的区组，使得如果x^j的第 p 个元素取u，于是 p 就包含在第u个区组中。显然的，这q_j个区组形成了一个平行类，即P_j，P_j是均匀的。对应 X 中的 m 个列，一共有$q_1+\cdots+q_m$个区组。令$\beta=\bigcup_{j=1}^m P_j$表示这$q_1+\cdots+q_m$个区组的集合，$v=\{1,2,\cdots,n\}$。注意到前一节所定义的$\psi_{ij}$实际上是处理$i$和$j$同时出现的区组数目。$\psi_{ij}=\psi$对$\forall i\neq j$表示$v$中任意不同的处理对恰好出现在$\psi$个区组中。因此，$(v,\beta)$是一个$URD(n,k,\lambda,R)$，这里$K=\{n/q_1,\cdots,n/q_m\}$，$R=\{1,\cdots,1\}$。

综上所述，我们得到下面的定理，它不仅在上述均匀设计的构造方法中起重要作用，而且在试验设计与组合设计中建立起重要桥梁。

定理 2 存在一个$U_n\left(\left(\frac{n}{k_1}\right)^{r_1},\cdots,\left(\frac{n}{k_l}\right)^{r_l}\right)$有$\psi_{ij}=\psi$对$\forall 1\le i\neq j\le n$当且仅当存在一个 $URD(n,k,\lambda,R)$，这里 $K=\{k_1,\cdots,k_l\}$，$R=\{r_1,\cdots,r_l\}$ 且 $\psi=\left(\sum_{j=1}^l r_j(k_j-1)\right)/(n-1)$是一个正整数。

3. 一些构造均匀设计的方法

定理 2 保证了我们不用计算机搜寻就可由URD构造一些均匀设计，而URD在组合设计理论中已被广泛研究。在这一节，我们将利用一些构造URD的方法来构造混水平的均匀设计。我们主要介绍用可分解的组区分设计(Resolvable Group Divisible Dsign)和拉丁方(Latin Squares)两种方法来构造均匀设计。

3.1　基于可分解的组区分设计的构造

所谓的可分解的组区分设计是URD中很重要的一类。令 n 和 g 是正整数，n 是 g 的倍数，一个组区分设计(Group Divisible Dsign)指数为 1，阶为 n 和类型为 $g^{n/g}$，记为$k-GDD(g^{n/g})$，是一个三重组(v,θ,β)，这里

1．v是含 n 个处理的集合；

2．θ是v的一个剖分,它包含一些v的子集,这些子集叫做大小为 g 的组(Group)；

3．β是v中的区组的集合，其中每个区组的大小为 k；

4．不同组中每对不同处理仅在一个区组中同时出现；

5．没有一个区组包含两个来自同一组的的处理。

下面我们来看一个GDD的简单例子。

例3　一个$2-GDD(3^2)$。在例 $1URD(6,\{3,2\},1,\{1,3\})$的基础上取$v=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$\theta=P_1$，$\beta=\bigcup_{j=2}^{4}P_j$，于是$(v,\theta,\beta)$是一个$2-GDD(3^2)$。

如果一个GDD的区组可以划分为平行类，这个GDD叫做可分解的GDD，记为$k-RGDD(g^{n/g})$。例 3 中这个$2-GDD(3^2)$是一个$2-RGDD(3^2)$。很明显，当 g=1 时，一个$k-RGDD$实际上是一个可分解的平衡不完全区组设计$RBIBD(n,k,1)$。

假设(v,θ,β)是一个$k-RGDD(g^{n/g})$，令$\beta^*=\theta\cup\beta$，于是可以认为β^*是一个区组设计，这里θ中的组恰好形成一个具有大小为 g 的平行类。由已定义的GDD，可以看到v中每对元素只出现在β^*的一个区组中。由$RGDD$的可分解性和均匀性，这个区组设计β^*是一个$URD(n,k,\lambda,R)$，这$\lambda=1$，$K=\{g,k\}$和$R=\{1,r_k\}$。由(3)，$r_k=(n-g)/(k-1)$。因此，依据定理 2 和$k-RGDD(g^{n/g})$存在的已知结果，我们得到以下混水平的均匀设计存在的无穷类。

定理 3 如果存在一个$k-RGDD(g^{n/g})$，则存在一个$U_n\left(\left(\frac{n}{g}\right)^1\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n-g}{k-1}}\right)$。特别地，我们有：

1．如果 n 是偶数，$n\equiv 0(\bmod g)$，则存在一个$U_n\left(\left(\frac{n}{g}\right)^1\left(\frac{n}{2}\right)^{n-g}\right)$(Rees and Stinson , 1992)。

2． 如果 n-g 是偶数，$n\equiv 0(\bmod 3)$，$n\equiv 0(\bmod g)$，且$(g,n)\notin\{(2,6),(2,12),(6,18)\}$，则存在一个$U_n\left(\left(\frac{n}{g}\right)^1\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n-g}{2}}\right)$(Rees , 1993)。

3．如果 $p\equiv 0(\bmod 4)$ 且 $p\neq 4$，则存在一个$U_{3p}\left(p^1\left(\frac{3p}{4}\right)^{p-1}\right)$可能除 $p\in\{88,124\}$ 外(Ge , 2001)。

4．如果 $p\geq 4$，则存在$U_{12p}\left(p^1(3p)^{4p-4}\right)$可能除 $p\in\{17,18,23,27\}$ 外(Ge , 2002)。

5． 如果 $p\geq 1$，则存在$U_{60p}\left(5^1(15p)^{16p}\right)$(Rees , 2000)。

6． 如果 $p\geq 1$，则存在$U_{120p}\left(6^1(24p)^{25p}\right)$(Rees , 2000)。

3.2 基于拉丁方的构造

拉丁方与区组设计的关系密切，且可利用它产生一个g^2次试验g^{g+1}个因素的正交主效应设计。在这一小节，拉丁方被用于构造混水平的均匀设计。

一个$g\times g$矩阵具有 g 个符号作为它的元素，如果其每个符号在每行每列只出现一次，就叫做一个阶为 g 的拉丁方。如果g^2对元素在两个拉丁方的同一位置都不相同，则称这两个拉丁方是正交的。对于一个拉丁方的集合，如果其中任意一对都正交，则称之为两两正交的拉丁方集。令 N(g)表示具阶为 g 的两两正交的拉丁方的最大数目。N(g)可由 Colbourn 和 Dinitz (1996) 的结果得到。很容

易验证如果$N(g)\ge k-1$，则存在一个$k-RGDD(g^k)$。由定理 3，我们得到下面的重要定理，它给出了正交拉丁方对和均匀设计的关系。

定理 4 如果$N(g)\ge k-1$，则存在一个$U_{kg}\left(k^1 g^g\right)$。

下面给出一个由两两正交的拉丁方构造$RGDD$和均匀设计的例子。

表 **1** 两个阶为 4 的正交拉丁方

8	**6**	**7**	**5**	**9**	**11**	**12**	**10**
5	**7**	**6**	**8**	**11**	**9**	**10**	**12**
6	**8**	**5**	**7**	**12**	**10**	**9**	**11**
7	**5**	**8**	**6**	**10**	**12**	**11**	**9**

例 4 表 1 给出了两个阶为 4 的正交拉丁方。取$v=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$，

$\theta=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{9,10,11,12\}\}$， $\beta=\bigcup_{j=1}^{4}P_j$ 这里

$$P_1=\{\{1,8,9\},\{2,6,11\},\{3,7,12\},\{4,5,10\}\}\text{；}$$

$$P_2=\{\{1,5,11\},\{2,7,9\},\{3,6,10\},\{4,8,12\}\}\text{；}$$

$$P_3=\{\{1,6,12\},\{2,8,10\},\{3,5,9\},\{4,7,11\}\}\text{；}$$

$$P_4=\{\{1,7,10\},\{2,5,12\},\{3,8,11\},\{4,6,9\}\}\text{。}$$

很明显(v,θ,β)是一个$3-RGDD(4^3)$，由这个$RGDD$可以构造一个$U_{12}\left(3^1 4^4\right)$如下表 2。

表 2　一个$U_{12}(3^1 4^4)$

run	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	4	1	3	2
6	2	2	3	1	4
7	2	3	2	4	1
8	2	1	4	2	3
9	3	1	2	3	4
10	3	4	3	2	1
11	3	2	1	4	3
12	3	3	4	1	2

由两两正交的拉丁方可以得到以下均匀设计的存在类。

推论 1　1．对任意强度g和正整数$k \le g$，存在一个$U_{kg}\left(k^1 g^g\right)$。

2．对任意正整数g，存在一个$U_{2g}\left(2^1 g^g\right)$。

3．对整数$g \notin \{2,6\}$，存在一个$U_{3g}\left(3^1 g^g\right)$。

4．对整数$g \notin \{2,3,6,10\}$，存在一个$U_{4g}\left(4^1 g^g\right)$。

5．对整数$g \notin \{2,3,4,6,10,14,18,22\}$，存在一个$U_{5g}\left(5^1 g^g\right)$。

6．对整数$g > 6, g \notin \{10,14,15,18,20,22,26,30,34,38,46,60,62\}$，存在一个$U_{6g}\left(6^1 g^g\right)$。

4．结束语

在这篇文章中我们利用离散偏差作为均匀性的度量来构造均匀设计，建立了任意不同两行间的 Hamming 距离相同的均匀设计与均匀可分解设计之间的 1－1 对应的关系，由此建立起了试验设计与组合设计之间的重要桥梁，从而得到许多混水平均匀设计存在的无穷类。

据我们所知，广义最小混杂设计和最小矩混杂设计的构造方法是不多的。依据 Qin and Fang (2003)，我们得到的均匀设计具有最小矩混杂，并且得到的对称

的均匀设计也有广义最小混杂。因此，我们的方法也可以用于系统地构造最小矩混杂设计和广义最小混杂设计。另外，Xu (1999)把最优设计理论中的泛最优性(Universal Optimality)的概念介绍到计算机实验中，并说明，一个设计如果具有相等的 Hamming 距离，则是泛最优的。显然，本文中得到的均匀设计在 Hamming 距离下也是泛最优的。

由定理 1，如果删去由我们的方法得到的均匀设计中的任一列，余下的设计仍然是一个均匀设计。另一方面，我们也可以通过增加任意平衡列到我们所得到的均匀设计中，得到的新设计仍是一个均匀设计。但是这一列可能与均匀设计中的某一列混杂，因此，这一列的选取要特别小心。

致谢：

在本文的完成过程中，曾得到方开泰教授、葛根年教授、谢民育教授、刘民千博士等有益的帮助，在此特表谢意。本文得到了湖北省自然科学基金(2003ABA022)的资助。

参考文献：

[1] Colbourn, C.J., Dinitz, J.H., 1996. CRC handbook of combinatorial designs. CRC Press Inc, Boca Raton.

(New results are reported at http://www.emba.uvm.edu/dinitz/ newresults.html).

[2] Danziger, P., 1997. Uniform restricted resolvable designs with r=3. Ars Combin. 46, 161-176.

[3] Danziger, P., Mendelsohn, E., 1996. Uniformly resolvable designs. J. Combin. Math. Combin. Comput. 21, 65-83.

[4] Dey, A., 1985. Orthogonal fractional factorial designs. John Wiley & Sons, New York, NY.

[5] Fang, K.T., Ge, G., Liu, M.Q., 2002. Uniform supersaturated design and its construction. Sciencce in China 45, 1080-1088.

[6] Fang, K.T., Lin, D.K.J., Winker, P., Zhang, Y., 2000. Uniform design: theory and applications. Technometrics 42, 237-248.

[7] Fang, K.T., Ma, C.X., Winker, P., 2002. Centered L_2-discrepancy of random sampling and Latin hypercube design, and construction of uniform design. Math. Comp. 71, 275-296.

[8] Fang, K.T., Shiu, C.X., Pan, J.X., 1999. Uniform designs based on Latin squares. Statist. Sinica 9, 905-912.

[9] Fang, K.T., Wang, Y., 1994. Number-Theoretic Methods in Statistics. London: Chapmanand Hall.

[10] Ge, G., 2002. Resolvable group divisible designs with block size four. Discrete Math. 243, 109-119.

[11] Hickernell, F.J., 1998b. Lattice Rules: How Well Do They Measure Up? in: Random and Quasi-Random Point Sets, eds. P. Hellekalek, and G. Larcher, Lecture Notes in Statistics, Vol.

138, 109-166. New York: Springer.

[12] Hickernell, F.J., Liu, M.Q., 2002.Uniform designs limit aliasing. Biometrika 89, 893-904.

[13] Liu, M.Q., Hickernell, F.J., 2002. $E(S^2)$ -optimality and minimum discrepancy in 2-level

supersaturated designs, Statist. Sinica 12, 931-939.

[14] Qin, H., Fang, K.T., 2003. Discrete discrepancy in factorial designs. Metrika, to appear.

[15] Rees, R., 1987. Uniformly resolvable pairwise balanced designs with block sizes two and three. J. Combin. Theory A 45, 207-225.

[16] Rees, R., 1993. Two new direct product type constructions for resolvable group divisible designs. J. Combin. Designs 1, 15-26.

[17] Rees, R., 2000. Group divisible designs with block size k having k+1 groups, for k=4 and 5. J. Combin. Designs 8, 363-386.

[18] Rees, R., Stinson, D.R., 1992. Frames with block size four. Canad. J. Math. 44, 1030-1049.

[19] Weyl, H., 1916. $\ddot{\rm U}$ber die Gleichverteilung der Zahlen mod eins. Math. Ann. 77, 313-352.

[20] Xu, H., 2002. Minimum moment aberration for nonregular designs and supersaturated designs. UCLA Statistics Electronic Publications, preprint 312.

[22] Xu, H., Wu, C.F.J., 2001. Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs, Ann. Statist. 29, 549-560.