關於 2 水平折疊設計的一個結果

余慧敏　　覃紅

（華中師範大學數學與統計學院　　武漢）

摘要　繼 Fang , Lin and Qin (2003),我們用均勻性作爲比較折疊方案的標準，並得到兩個有趣的結果。

關鍵字：折疊方案,均勻性,均勻設計,部分因數設計。

折疊技術是一種用於 2 水平序貫試驗（follow-up experiment）的傳統方法，它是將一個 2 水平（記爲+1，-1）的設計的一個或多個因數的水平全部倒轉過來從而得到一個新的試驗設計（稱之爲折疊設計）。這種技術可以在 Box 等（1978）、Montgomery (2001)、Neter (1996)和 Wu and Hamada (2000)等教科書中找到。研究折疊技術主要基於如下三個原因：⑴它能夠提高設計的分辨力（resolution）,使得更多的效應（主效應和交互效應）能被給出；⑵它有利於序貫試驗，通過採用折疊技術，我們可以把兩個或多個設計合併起來形成一個新的設計，從而達到估計更多的效應的目的；⑶它提供了一個構造試驗次數比較大的設計的辦法。

我們考慮一個 n 次試驗、m 個因數的 2 水平設計 T，定義 $T=(t_1\ t_2 \cdots t_m)=(t_{ij})$,$t_{ij}=\pm 1$。用$\gamma=\delta_1\cdots\delta_m$定義一個折疊方案（foldover plan），其中δ_i當 T 的第 i 列倒轉過來時爲 1，其他情況爲 0。相應的折疊方案空間Γ包含有 2^m 個可能折疊方案。對於設計γ，令 $s=\sum_{i=1}^{m}\delta_i$,當 s=m 時，折疊方案就是一個傳統的完全折疊方案（full foldover plan）。對一個 2 水平因數設計 T 和給定的折疊方案γ，能夠產生如下一個新的 2n 次試驗、m 個因數的聯合設計 T_γ：

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ (-1)^{\delta_1} t_1 & (-1)^{\delta_2} t_2 & \cdots & (-1)^{\delta_m} t_m \end{pmatrix}$$

由完全折疊方案（s=m）而生成的聯合設計的統計合理性已經有很多文章討論。Box and Hunter（1961）首先發現，通過折疊 Plackett-Burman 設計可以獲得分辨力爲 IV 的設計；Diamond（1995）研究了折疊 12 次試驗的 Plackett-Burman 設計的理論性質，並說明所得到的聯合設計非常適合某些因數篩選；Miller and Sitter（2001）進一步闡明了即使一些因數的 2 階交互效應非常顯著，折疊 12 次試驗的 Plackett-Burman 設計也是非常有用的。

Box 等（1978）首先討論了只折疊一個因數的情形（m=1），通過這種辦法可以把某一特殊的因數從同其他因數的混雜（alias）中區分出來。最近，不完全折疊方案在設計文獻中引起了較大的興趣。Montgomery and Runger（1996）通過折疊一個或兩個因數來構造分辨度爲 IV 的設計。Li and Mee（2002），Li and Lin（2003）基於聯合設計的混雜標準（aberration criterion）給出了正規（regular）2 水平部分因數的最優折疊方案;Li , Lin and Ye（2002）基於聯合設計的廣義最小混雜標準（generalized minimum aberration）給出了非正規（non-regular）2 水平的最優折疊方案。最近，Fang , Li and Qin（2003）用均勻性最爲標準來比較折疊方案，把 Li and Lin（2003）和 Li , Lin and Ye（2002）的結果放到一個統一的理論框架中，並得到了一些新結果。

本文裏，我們仍用中心化 L_2-偏差來度量聯合設計 T_γ 的均勻性。對於給定的設計

T 和折疊方案γ，相應的聯合設計 T_γ 的中心化 L_2-偏差值，記爲 CD(T_γ)，可由下列公式

$$(CD(T_\gamma))^2 = c + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\left|x_{ki}-x_{ji}\right|-\frac{1}{2}\left|x_{kj}+(-1)^{\delta_i+1}x_{ji}-\delta_i\right|\right)$$

來計算，其中 c==$(\frac{13}{12})^m - 2(\frac{35}{32})^m$。CD($T_\gamma$)的值越小，$T_\gamma$ 的均勻性就越好。

本文裏，我們得到如下結論：

定理：(1) 對於所有具有相同的偶字長（word length）的設計，在完全折疊方案下，它們的聯合設計具有相同的均勻性；

(2) 在所有具有相同偶數分辨度（resolution）的設計中，有較好正交性的設計在完全折疊方案下其對應的聯合設計具有較好的均勻性。

致謝　感謝謝民育教授有益的討論。本文的到湖北省自然科學基金的支援。

參考文獻

[1] Box, G.E.P., Huter, W.G., Hunter, J.S., 1978.Statistics for Experiments.Wiley, New York, NY.

[2] Fang, K.T., Lin, D.K.J., Qin, H., 2003.A note on optimal foldover design， 62，245-250。

[3] Li, W., Lin, D.K.J., 2003.Optimal foldover plan for two-level fractional factorial designs.Technometrics ，45，142-150.

[4] Li, H., Mee, R.W., 2002.Better foldover fractions for resolution III 2^{k-p} designs. Technometrics 44, 278-283.

[5] Li, W., Lin, D.K.J., Ye, K.Q., 2003.Optimal foldover plans for non-regular orthogonal designs.Submitted to Technometrics for publication.

[6] Montgomery, D.C., Runger, G.C., 1996.Foldover of 2^{k-p} resolution IV experimental designs.J. Quality Tech,28,446-450.