互补设计的均匀性

周涌　　　覃红

（华中师范大学　数学与统计学学院　　武汉）

摘　要：文章总述了当 ⁄ 　是一个均匀设计且任意两次试验间的 Hamming 距离都相等时，一对互补设计 ⁄ = （$D|\overline{D}$）的概念，给出了均匀性与一对互补设计的广义字长型间的联系。

关键词：最小广义混杂　均匀设计　广义字长型

一　背景介绍

部分因子设计是试验调查中最常用的设计。目前，已经建立了许多比较各种设计的优良性准则。例如，对于正规部分因子，有分辨力准则(Resolution)（Box,Hunter 和 Hunter(1978)）,最小混杂准则(Minimum Aberration,简记为 MA)（Fries 和 Hunter（1980）以及 Franklin（1984））等。如果两个设计 D 和 $\overline{D}$ 形成一个饱和正规因子设计，我们说 $\overline{D}$ 是 D 的补设计。如何用 $\overline{D}$ 的字长型来刻画 D 的字长型，这一问题受到了很多关注。Chen 和 Hedayat（1996），Tang 和 Wu（1996）以及 Suen 等人对一个设计与其补设计的关系进行了系统的研究。对于非正规因子的情况，Ma 和 Fang（2001），Xu 和 Wu 各自独立地将 MA 准则扩展到 最小广义混杂准则（MGA） 和广义最小混杂准则（GMA）。 MGA 和 GMA 对于对称设计来说本质上是一致的。

对于一个有 n 次实验和 s 个因子的部分 D，记

$$E_i(D)=\tfrac{1}{n}\#\{(c,d)\ |c,d\in D,d_H(c,d)=i\},$$

这里 d_H 表示 Hamming 距离，#S 表示集合 S 中元素的个数。向量（$E_0(D)$，$E_1(D)$，……，$E_s(D)$）称为 D 的距离分布。

定义 1：对于一个有 n 次实验和 s 个 q 水平因子的部分 D，其广义字长型定义为

$$W^g(D)=\{A_1^g(D),\ \cdots\cdots,\ A_s^g(D)\},$$

这里

$$A_i^g(D)=[n(q-1)]^{-1}\sum_{j=0}^{s}P_i(j;s,q)E_j(D),$$

其中$i=1,\ldots\ldots s,\ P_i(j;s,q)$为 Krawtchouk 多项式。

由广义字长型，我们可以定义广义分辨力和广义混杂。

定义 2：广义分辨力是指向量$W^g(D)$中使元素正元的最小的下标i.如果D_1,D_2是两个设计，t是使得$A_t^g(D_1)\neq A_t^g(D_2)$的最小正整数，而且$A_t^g(D_1)<A_t^g(D_2)$，则称$D_1$ 比D_2有较小的**广义混杂**。如果没有设计比D 有更小的广义混杂，则称D 有**最小广义混杂（MGA）**.如果设计为正规的，则最小广义混杂（MGA）就是一般的最小混杂（MA)。

均匀性准则与最小混杂准则在比较部分因子设计时是不同的。在一些均匀性测度下,Fang 和 Murkerjee(2000)以及 Ma 和 Fang(1999)发现了均匀性与混杂性这两个看似无关的领域在 2 水平和 3 水平的正规部分因子设计中的联系。更进一步, Ma 和 Fang(2001)给出了广义字长型和设计的均匀性在 2、3 水平时的联系.这就扩展了以前在非正规因子方面的研究。

定义 3：假定 ⁄ 是均匀设计, ⁄ $\in\propto$（n; q_1^p， $q_2^{\bar{p}}$） ,满足任意两次试验间的 Hamming 距离等于常数 λ, $p+\bar{p}=s$.所有这样的设计所成集合为 $\propto$（n; q_1^p， $q_2^{\bar{p}}$，λ）.在一个分解 ⁄ =（$D\mid\bar{D}$）中, ⁄ $\in\propto$（n; q_1^p， $q_2^{\bar{p}}$，λ） .如果D包含p个q_1水平因子而$\bar{D}$包含$\bar{p}$个q_2水平因子,则这一分解（$D\mid\bar{D}$）叫做一对**互补设计**.当$q_1=q_2$,且D为正规部分时,$\bar{D}$就是D的古典补设计.

本文主题是研究均匀性与一对补设计的广义字长型间的联系,相关结论将在第二节将给出，第三节则进行了一些说明。

二　主要结论

本节我们将不加证明地给出两个定理，其中以 WD 记可卷型偏差，以 CD 记中心化偏差。

定理 1：如果 ⁄ =（$D\mid\bar{D}$）$\in\propto$（n; q_1^p， $q_2^{\bar{p}}$，λ)，其中D包含了 ⁄ 中的p个 2 水平列，则

（1）

$$[\mathrm{WD}（⁄）]^2 = -\left(\tfrac{4}{3}\right)^s + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^s\left[1-\left(\tfrac{23}{27}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^s\left(\tfrac{23}{27}\right)^{\lambda}\left(\tfrac{91}{92}\right)^p\sum_{j=0}^{p}\tfrac{1}{91^j}A_j^g(D)$$

$$=-\left(\tfrac{4}{3}\right)^s + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^s\left[1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+2\left(\tfrac{3}{2}\right)^s\left(\tfrac{5}{6}\right)^{\lambda}\left(\tfrac{137}{135}\right)^{\bar{p}}\sum_{i=0}^{\bar{p}}\left(-\tfrac{1}{137}\right)^i A_i^g(\bar{D}),$$

这里$s=p+\bar{p}$， $A_0^g(D)=1$， $A_0^g(\bar{D})=\tfrac{1}{2}$.

（2）

$$[\mathrm{WD}(D)]^2= -\left(\tfrac{4}{3}\right)^p + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^p\left[1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+2\left(\tfrac{3}{2}\right)^p\left(\tfrac{5}{6}\right)^{\lambda}\left(\tfrac{17}{15}\right)^{\bar{p}}\sum_{i=0}^{\bar{p}}\left(-\tfrac{1}{17}\right)^j A_j^g(\bar{D})$$

$$[\mathrm{WD}(\bar{D})]^2= -\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\bar{p}} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\bar{p}}\left[1-\left(\tfrac{23}{27}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\bar{p}}\left(\tfrac{23}{27}\right)^{\lambda}\left(\tfrac{25}{23}\right)^p\sum_{i=0}^{p}\tfrac{1}{91^i}A_i^g(D)$$

（3）

$$[\mathrm{CD}(D)]^2=\left(\tfrac{13}{12}\right)^p-2\left(\tfrac{35}{32}\right)^p+\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{5}{4}\right)^p\left[1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+2\left(\tfrac{5}{4}\right)^{p-\lambda}\left(\tfrac{7}{6}\right)^{\bar{p}}\sum_{j=0}^{\bar{p}}\left(-\tfrac{1}{14}\right)^j A_j^g(\bar{D})$$

对于一类饱和正交数组$OA(n,2^p3^{\bar{p}},2)$,例如$OA(36,2^{11}3^{p12},2)$和$OA(108,2^{35}3^{p36},2)$（见 Hedayat(1999)）,我们有如下定理：

定理 2：如果 ⁄ =（$D\mid\bar{D}$）是一个饱和正交数组$OA(n,2^p3^{\bar{p}},2)$,其中D包含了 ⁄ 中的p个 2 水平列，则

(1)

$$[\mathrm{WD}\ (\ /\ )]^2 = -\left(\tfrac{4}{3}\right)^s + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^s \left[1-\left(\tfrac{23}{27}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^s \left(\tfrac{23}{27}\right)^{n/2} \tfrac{1}{2^p}\sum_{j=0}^{p} G_j A_j^g (D)$$

$$= -\left(\tfrac{4}{3}\right)^s + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^s \left[1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^s \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n/2} \tfrac{2}{3^{\overline{p}}}\sum_{i=0}^{\overline{p}} H_i A_i^g (\overline{D})$$

其中

$s = p + \overline{p}$，

$G_i = \left[1+\tfrac{15}{2}\left(\tfrac{1}{23}\right)^{2/3}\right]^{p-j}\left[1-\tfrac{15}{2}\left(\tfrac{1}{23}\right)^{2/3}\right]^j,\ 0 \le j \le p$，

$H_i = \left[1+\tfrac{46}{27}\left(\tfrac{6}{5}\right)^{3/2}\right]^{\overline{p}-i}\left[1-\tfrac{23}{27}\left(\tfrac{6}{5}\right)^{3/2}\right]^i$，$0 \le i \le \overline{p}$，

$A_0^g(D) = 1$，$A_0^g(\overline{D}) = \tfrac{1}{2}$．

(2)

$$[\mathrm{WD}(D)]^2 = -\left(\tfrac{4}{3}\right)^p + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^p \left[1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^{\lambda}\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^p \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n/2} \tfrac{2}{3^{\overline{p}}}\sum_{i=0}^{\overline{p}} K_j A_j^g (\overline{D})$$

$$[\mathrm{WD}(\overline{D})]^2 = -\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\overline{p}} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\overline{p}} \left[1-\left(\tfrac{23}{27}\right)^{n/3}\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\overline{p}} \left(\tfrac{23}{27}\right)^{n/3} \tfrac{1}{2^p}\sum_{i=0}^{p} L_i A_i^g (D)$$

其中

$K_j = \left[1+2\left(\tfrac{6}{5}\right)^{3/2}\right]^{\overline{p}-j}\left[1-\left(\tfrac{6}{5}\right)^{3/2}\right]^j$，$0 \le j \le \overline{p}$，

$L_i = \left[1+\left(\tfrac{27}{23}\right)^{2/3}\right]^{p-i}\left[1-\left(\tfrac{27}{23}\right)^{2/3}\right]^i$，$0 \le i \le p$，

(3)

$$[\mathrm{CD}(D)]^2 = \left(\tfrac{13}{12}\right)^p - 2\left(\tfrac{35}{32}\right)^p + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{5}{4}\right)^p \left[1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^{n/2}\right]$$

$$+\left(\frac{5}{4}\right)^{(n/2)-p}\left(\frac{2}{3^{\bar{p}}}\right)\sum_{j=0}^{\bar{p}} M_j A_j^g\left(\overline{D}\right)$$

其中

$$M_j=\left[1+2\left(\tfrac{5}{4}\right)^{3/2}\right]^{\bar{p}-j}\left[1-\left(\tfrac{5}{4}\right)^{3/2}\right]^j,\ 0\le j\le \bar{p}\ .$$

三 说明

定理 1 和定理 2 表明：一个属于$\propto$（n; q_1^p， $q_2^{\bar{p}}$， λ）或者饱和正交数组 $OA(n,2^p3^{\bar{p}},2)$的设计 ⁄ =($D\mid\overline{D}$),在可卷型偏差 Wd 意义下的均匀性仅依赖于D或$\overline{D}$的广义混杂。如果D有最小广义混杂，则 ⁄ =（$D\mid\overline{D}$）是一个均匀设计。如果$\overline{D}$有最小广义混杂，⁄ 不一定是均匀设计。

参考文献：

[1] Box, G.E.P., Hunter, W.G., Hunter, J.S., 1978.Statistics for Exprimenters.Wiley, New york.

[2] Chen, H., Hedayet, A.S., 1996.2^{n-m} fractional factorial designs with weak minimum aberration designs. Ann.Statist.24, 2536-2548.

[3] Fang, K.T., Murkerjee, R., 2000.Connection between uniformity and aberration in regular fractions of two-level factorials. Biometrika 87, 173-198.

[4] Fang,K.t., Ma,C.X., Murkerjee,R., 2002.Uniformity in fractional factorials.In:Fang, K.T., niederreiter,H., Hickernell, F.J.(Eds), Monte Carlo Methods in Scientific Computing.Springer, Berlin.

[5] Franklin, M.F., 1984.Constructing tables of minimum aberration p^{n-m} designs.Technometrics 26, 225-232.

[6] Fries, A., Hunter, W.G., 1980.minimum aberration 2^{q-p} designs.Technometrics 22, 601-608.

[7] Hall, M.J.W., 1961.Hadamard matrices of order 16.Research Summary, No.16-10, Vol.1.Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA, pp.21-26.

[8] Hedayat, A.S., Sloane, N.J., Stufken, J., 1999.Orthogonal Arrays:Theory and Apllication.Springer Berlin.

[9] Hickernell, F.J., 1998a. A generalized discrepancy and quadrature error bound.Math.Comput.67, 299-322.

[10] Hickernell, F.J., 1998b.Lattice Rules:How Well Do They Measure Up?

In:Hellekalek, P., larcher, G.(Eds), Random and Quasi-Random Point Sets, Lecture Notes in Statistics, Vol.138.Springer, New York.
[11] Lin, D.K.J., Draper, N.R., 1992.Projection properties of Plackett and Burman designs. Technometrics 34, 423-428.
[12] Lin, D.K.J., Draper, N.R., 1995.Screening properties of certain two-level designs.Metrika 42, 99-118.
[13] Ma, C.X., Fang, K.T., 2001.A note on generalized aberration factorial designs.Metrika 53, 85-93.
[14] Murkerjee, R., Wu, C.F.J., 1995.On the existence of saturated and nearly saturated asymmetrical orthogonal arrays.Ann.Statist.23, 2102-2115.
[15] Suen, C., Chen, H., Wu, C.F.J., 1997.Some identities on q^{n-m} designs with application to minimum aberration designs.Ann.Statist.25, 1176-1188.
[16] Tang, B.X., deng, T.Y., 1999.Minimum G_2-aberration for nonregular fractional designs.Ann.statist.27, 1914-1926.
[17] Tang, B.X., Wu, C.F.J., 1996.Characterization of minimum aberration 2^{n-k} designs in terms of their complementary designs.Ann.Statist.24, 2524-2559.
[18] Xu, H.,Wu, C.F.J., 2001.Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs.Ann.Statist.29, 549-560.